1. Погляд у минуле. Спектральні спостереження галактики дали змогу визначити червоне зміщення в її спектрі z = 0,1. Знайдіть, на якій відстані від нас перебувала ця галактика в момент випромінювання спостережуваного світла. Вважайте швидкість окремої галактики незмінною впродовж космологічного розширення.

Розв'язання

Нехай у момент випромінювання спостережуваного світла відстань до галактики була r_0. Тоді її світло досягає Землі за час

$$t=\frac{r_0}{c}, \quad (1)$$

де c – швидкість світла. Оскільки швидкість окремої галактики є незмінною впродовж космологічного розширення (космологічна модель Мілна), то за цей час вона віддаляється на відстань

$$\Delta r=\upsilon t=\upsilon\frac{r_0}{c}, \quad (2)$$

де υ – проекція просторової швидкості галактики на промінь зору спостерігача (променева швидкість). З формули для ефекту Доплера (у нерелятивістській формі):

$$z=\frac{\upsilon}{c}. \quad (3)$$

В момент спостереження відстань до галактики, враховуючи (2) і (3), становитиме:

$$r=r_0+\Delta r=r_0(1+z). \quad (4)$$

З іншого боку, за законом Габбла:

$$\upsilon=Hr. \quad (5)$$

З рівнянь (3), (4) і (5) отримуємо шуканий результат:

$$r_0=\frac{c}{H}\cdot\frac{z}{1+z}. \quad (6)$$

Підставляючи числові значення і приймаючи для сталої Габбла значення H = 70 км/(с·Мпк), остаточно знаходимо $r_0 \approx$ 390 Мпк.

Відповідь: ≈ 390 Мпк.

2. Густини чорних дір. За радіуси чорних дір приймають так званий гравітаційний радіус. Його значення збігається з радіусом тіла для якого друга космічна швидкість дорівнює швидкості світла. Наймасивніша з чорних дір відкрита в центрі галактики NGC 4889 (сузір'я Волосся Вероніки) – $2{,}1\cdot10^{10}\,M_{\mathrm{SUN}}$. Визначити: у скільки разів умовна середня густина цієї чорної діри відрізняється від ядерної густини, за яку можна прийняти середню густину наймасивнішої нейтронної зорі Vela X-1 (сузір'я Вітрила) – 1,88 M_{SUN}, прийнявши значення її радіуса 10 км.

Розв'язання

1) Друга космічна швидкість для космічного тіла з масою M і радіусом R визначається за формулою

$$V=\sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

2) Прирівнявши це значення швидкості світла c, за умови $R = r_g$, визначимо значення гравітаційного радіуса чорної діри

$$r_g=\frac{2M_{чд}}{c^2}=6{,}22\cdot10^{13}\,м$$

3) Умовна середня густина чорної діри обчислюється за формулою

$$\bar{\rho}_{чд}=\frac{M_{чд}}{\frac{4}{3}\pi r_g^3},$$

що за умовою задачі відповідає значенню

$$\bar{\rho}_{чд}=\frac{21\cdot10^9\cdot2\cdot10^{30}}{\frac{4}{3}\pi\left(6{,}2\cdot10^{13}\right)^3}=0{,}042\ \ кг/м^3.$$

4) Середня густина нейтронної зорі за умовою задачі

$$\rho_{нз}=\frac{1{,}88\cdot2\cdot10^{30}}{\frac{4}{3}\pi\left(10\cdot10^3\right)^3}=9{,}0\cdot10^{17}\ \ кг/м^3$$

5) Відповідь: отже, густина ядерної речовини (нейтронної зорі) більша за середню густину наймасивнішої чорної діри в

$$\frac{9{,}0\cdot10^{17}}{0{,}042}=2{,}1\cdot10^{19}$$ разів.

3. Зоряна система з екзопланетою. В сузір'ї Південного Зайця відкрито подвійну зоряну систему з приблизно однаковими масами та екзопланетою, яка рухається на низькій коловій орбіті зі швидкістю 4 300 км/с навколо компонента з меншою середньою густиною. Виявилося, що відношення середніх густин і мас цього компонента та екзопланети однакові і дорівнюють 100 000, а відношення середніх густин зоряних компонентів дорівнює мільярду.

Обчислити: астрофізичні характеристики (маси, радіуси та густини) зоряних компонентів і екзопланети. Обґрунтувати: до яких класів космічних тіл вони відносяться? Вказати на неточність в умові задачі, яка не впливає на кінцевий результат її розв'язання.

Розв'язання

Доцільно записати умову задачі у наступному (компактному) варіанті:

$$\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} = 10^9,\ \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_{пл}} = 10^5,\ \frac{M_1}{M_{пл}} = 10^5,\ M_1 \approx M_2,\ V_{кр} = 4{,}3 \cdot 10^6\ \ м/с$$

1) Наведені відношення густин і мас першого зоряного компоненту до відповідних значень екзопланети свідчать про те, що їх радіуси однакові

$$\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_{пл}} = 10^5 = \frac{M_1}{M_{пл}} \frac{\frac{4}{3}\pi R_{пл}^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = 10^5 \left(\frac{R_{пл}}{R_1}\right)^3 \ \Rightarrow\ R_{пл} = R_1$$

2) Використовуючи відношення густин зоряних компонентів з урахуванням того, що їх маси приблизно однакові, отримаємо співвідношення для їх радіусів

$$10^9 = \left.\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1}\right|_{M_1 \approx M_2} \approx \frac{M_2}{M_1} \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \ \Rightarrow\ \frac{R_1}{R_2} = 10^3.$$

3) Приблизна рівність маси компонентів і різниця в три порядки для радіусів можлива, якщо одна із мас компонентів дещо менша, а інша – дещо більша за масу Чандрасекара – максимальна маса білих карликів: 1,4 $M_\odot$. Тобто 1-й компонент є білим карликом, 2-й – нейтронною зорею.

4) Рух по низькій коловій орбіті навколо білого карлика відповідає першій космічній швидкості

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{GM_1}{R}}$$

з радіусом, що приблизно дорівнює радіусу білого карлика $R \approx R_1$

$$R_1 = \frac{GM_1}{V_{кр}^2} \approx \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.4 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{4,3^2 \cdot 10^{12}} \approx 10^7 \ м.$$

Тоді, вищеодержане відношення для радіусів зоряних компонентів ($R_1 / R_2 = 10^3$) дає змогу обчислити радіус другого компоненту – нейтронної зорі

$$R_2 \approx 10 \text{ км.}$$

5) Одержані маси та радіуси зоряних компонентів дають змогу обчислити їх середні густини

$$\bar{\rho}_1 = \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{1,4 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \left(10^7\right)^3} = 6,7 \cdot 10^8 \ кг/м^3,$$

$$\bar{\rho}_2 = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{1,4 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \left(10^4\right)^3} = 6,7 \cdot 10^{17} \ кг/м^3.$$

6) Із відношення середніх густин білого карлика до екзопланети, з урахуванням, що їх радіуси однакові, находимо масу екзопланети

$$\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_{пл}} = 10^5 = \frac{M_1}{M_{пл}} \left. \frac{\frac{4}{3}\pi R_{пл}^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \right|_{R_1 = R_{пл}} = \frac{1,4 M_\odot}{M_{пл}} \Rightarrow M_{пл} = 1,4 \cdot 10^{-5} M_\odot.$$

7) Звідси знаходимо середню густину екзопланети

$$\bar{\rho}_{пл} = \frac{M_{пл}}{\frac{4}{3}\pi R_{пл}^3} = \frac{1,4 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \left(10^7\right)^3} = 6,7 \cdot 10^3 \ кг/м^3.$$

Обчислені радіус і маса є типовими для землеподібних (силікатних) планет, густина виявилася дещо більшою. Така ситуація можлива, оскільки екзопланета перебуває близько до зоряного залишку, який, по-перше, пройшов стадію втрати гарячої зоряної оболонки, по-друге, середня густина найближчих до зір планет може бути більше за земну, але не перевищувати густину Феруму ($7,9 \cdot 10^3$ кг/м^3).

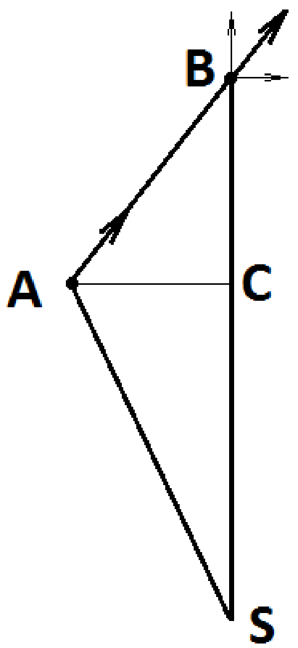
8) Відповідь: отже, із обчислених фізичних характеристик космічних тіл, випливає, що в умові фігурує подвійна зоряна система, компонентами якої є зоряні залишки – білий карлик і нейтронна зоря. Навколо білого карлика рухається екзопланета, яку необхідно віднести до суперземель (до яких відносять планети земного типу, радіус яких менше двох радіусів Землі). Неточність в умові задачі, яка не впливає на кінцевий результат її розв'язання, полягає в назві сузір'я. Сузір'я Південного Зайця не існує. Є сузір'я Зайця.

4. Зоря Каптейна. Найближча відома зоря зі сферичної складової Галактики – зоря Каптейна (сучасні координати $\alpha = 5^h\ 11{,}7^m$, $\delta = -45°\ 01'$) була відкрита Якобусом Каптейном у 1898 році. Її власний рух $\mu_\alpha = 6{,}5''$/рік, $\mu_\delta = -5{,}7''$/рік, паралакс 0,256", променева швидкість $v_r = 245$ км/с, блиск $8{,}853^m$. Як змінилась відстань до зорі, її видима зоряна величина та на скільки градусів (мінут, секунд) вона змістилась на фоні далеких зір з моменту відкриття. Вважати, що просторова швидкість зорі з часом не змінюється. Процесами в надрах зорі та на її поверхні знехтувати.

Розв'язання

Час, що пройшов з моменту відкриття: t = 119 років = $3.76\cdot10^9$ с.

Згідно з умовою задачі зоря рухалась фактично прямолінійно з моменту відкриття. Розрахуємо на скільки змінилась відстань до неї. Оскільки променева швидкість додатна, то зоря Каптейна віддаляється від нас. Умовно цей рух, відносно Сонця можна представити на рис.



Початкове положення зорі на момент відкриття – точка A.

Сучасне положення зорі – точка B.

Положення Сонця – точка S.

В цілому рух складається з двох компонент: радіальної (променева швидкість) та тангенціальної (в картинній площині). Радіальна швидкість зорі становить 245 км/с, тому довжина відрізка $BC = v_r \cdot t \approx 9.2 \cdot 10^{11}$км ≈ 6000а.о.≈ 0.03пк

Танценціальна швидкість зорі буде складати $v_t = 4.74\frac{\mu}{\pi}$, де μ - власний рух зорі в кутових секундах на рік, π – паралакс в кутових секундах. Власний рух зорі складається з двох частин (по прямому піднесенню та схиленню), та може бути розрахованим наближено згідно з теоремою Піфагора: $\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + (\mu_\alpha cos\delta)^2} \approx 7.3$"/рік.

Зоря за час t змістилась на небі на $\theta = t\mu \approx 119 \cdot 7.3 \approx 870 \approx 14'\ 29$.

Тангенціальна швидкість складає v_t =136 км/с. Повна просторова швидкість 280 км/с (кут BAC близько 60°).

Отже довжина відрізка $AC = v_t \cdot t \approx 5 \cdot 10^{11}$км ≈3400 а.о.

Відстань до зорі $SB = \frac{1}{\pi} = 3.906$пк.

Довжина відрізка SC=SB-BC=3.906-0.03=3.876 пк.

Згідно з теоремою Піфагора довжина відрізка AS = 3.876 пк.
Оскільки SC значно більше ВС (при порівняннях BC та AC), то очевидно, що тангенціальним рухом зорі можна знехтувати і використати лише довжину відрізку BC для оцінки зміни відстані до зорі, що спрощує розрахунки.
Згідно з формулою Погсона зміна блиску становитеме (за умовою, що світність зорі не змінюється з моменту відкриття):

$$m_0 - m = -5lg\frac{AS}{BS} \approx 0.017^m$$

Зоряна величина зорі Каптена зросла на 0.02^{m}

5 Схід Юпітера. У результаті спостережень за рухом Юпітера у північній Європі упродовж доби було виявлено, що планета перебувала на висоті 45^{O} на південь від зеніту у верхній кульмінації і на висоті 2^{O} - у нижній кульмінації. Оцініть час від моменту даного спостереження, через який Юпітер зійде над горизонтом у точці сходу. Нахилом орбіти Юпітера до екліптики та астрономічною рефракцією знехтувати.

Розв'язання

У точці сходу істинного горизонту можуть сходити лише ті світила, що розташовані на небесному екваторі, тобто їх схилення дорівнює нулю.

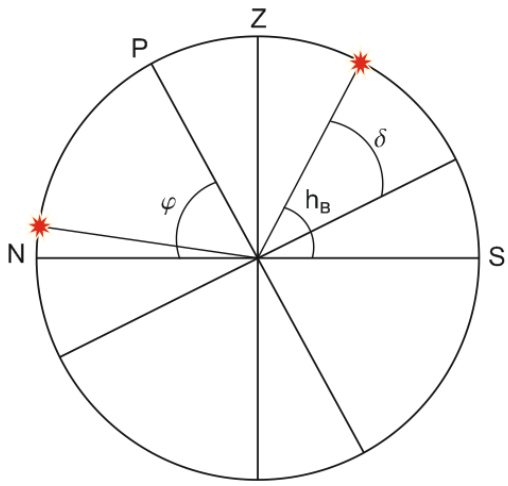


Рис. 1.

Знайдемо схилення Юпітера на момент проведення спостережень. Як відомо, висота світила в моменти кульмінацій пов'язана із схиленням світила та географічною широтою співвідношеннями (рисунок 1):

$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta$, $h_H = \varphi + \delta - 90^\circ$.

Звідси знаходимо схилення Юпітера на момент проведення спостережень:

$$\begin{matrix} \phi = 90^0 + \delta - h_B \\ \phi = h_H - \delta + 90^0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 90^0 + \delta - h_B = h_H - \delta + 90^0$$

$$\delta = \frac{h_H + h_B}{2} = \frac{2^\circ + 45^\circ}{2} = 23{,}5^\circ.$$

Одержаний результат показує, що *на екліптиці Юпітер знаходиться в точці літнього сонцестояння*. До точки осіннього рівнодення, де схилення дорівнює нулю, Юпітер буде рухатися *чверть* свого періоду.

Період орбітального руху знайдемо із третього закону Кеплера:

$$T^2 = a^3, \; T = \sqrt{a^3} = \sqrt{5,2^3} = 11,85 \text{ років}.$$

Знайдений в задачі час $t = \frac{T}{4} = \frac{11,85}{4} \approx 3$ роки.