1. Транзит Землі. Обчисліть максимально можливу тривалість транзиту Землі по диску Сонця у разі спостережень з поверхні Марсу. Прийняти, що орбіти планет лежать у площині екліптики; орбіта Землі – колова, параметри орбіти Марса подані в таблиці довідкових даних. Одиниця виміру часу – середня сонячна земна секунда.

Розв'язання

Найбільша тривалість транзиту Землі по диску Сонця можлива тоді, коли Марс перебуває в перигелії, а Земля проходить нижнє сполучення із Сонцем (у разі спостережень з поверхні Марса). Дійсно, в цей момент часу диск Сонця має найбільший кутовий розмір в марсіанському небі, а відносна кутова швидкість руху Землі та Марса мінімальна за модулем (Марс та Земля обертаються по орбітах в один бік).

1. Знайдемо швидкість орбітального руху Землі.

За умовою задачі орбіта Землі – коло, отже, швидкість її орбітального руху дорівнює першій космічній швидкості на відстані r_o = 1 а.о. = $1{,}496\cdot10^{11}$ м від Сонця. Отже,

$$v=(GM_c/r_o)^{1/2} \qquad (1)$$

З умови задачі та (1) знаходимо

$$v_З \approx 29{,}787 \text{ км/с} . \qquad (*)$$

Збережемо в проміжних обчисленнях зайву точність для забезпечення точності кінцевого розрахунку.

2. Скориставшись третім законом Кеплера, знайдемо значення середньої швидкості орбітального руху Марса:

$$\langle v_M \rangle = \frac{v_З}{\sqrt{a_M}} \quad . \qquad (2)$$

З (2) та (*) обчислюємо

$$\langle v_M \rangle \approx 24{,}131 \text{ км/с} \qquad (**)$$

3. Знаходимо орбітальну швидкість Марса в перигелії. Знаємо, що

$$v_{п} = v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

де v_0 – середня орбітальна швидкість руху планети, e – ексцентриситет його орбіти.

З умови та результату (**), знаходимо

$$v_{пМ} = 26{,}501 \text{ км/с}. \qquad (***)$$

4. Встановимо значення Δ_1 – відстані між Марсом та Землею в момент максимально тривалого транзиту Землі диском Сонця.

Очевидно, що

$$\Delta_1 = r_{пМ} - r_0, \qquad (4)$$

де $r_{пм}$ – відстань від Марса до Сонця в перигелії його орбіти.

$$r_{пМ} = a(1 - e). \qquad (5)$$

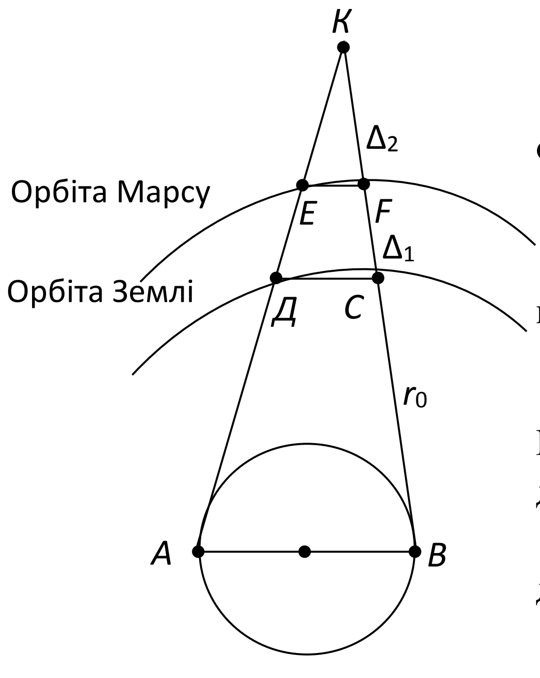


Рис.1.

Підставляючи в (4) та (5) параметри орбіти Землі та Марса знаходимо

$\Delta_1 = 5.705 \cdot 10^7$ км. (****)

5. Введемо на рис. 1 наступні позначення:

а) точки E та F – положення центру Марсу в моменти 1-го та 4-го контактів диску Землі під час її транзиту.

б) AB – видимий з поверхні Марса діаметр Сонця.

в) BF та AE – напрямки та точки 1-го та 4-го контактів, проведені з центру Марса.

г) точки C та $Д$ – точки перетину напрямків BF та AE з видимим з поверхні Марсу диском Землі в моменти 1-го та 4-го контактів відповідно.

Під час проведення наступних розрахунків будемо припускати:

1) Відмінність напрямків та точки 1-го та 4-го контактів у разі спостережень з довільної точки поверхні Марса порівняно з напрямками BF та AE нехтовно мала. Це припущення ґрунтується на тому, що діаметр Марсу $d_М$ набагато менший за $\Delta_1 = FC$.

2) Зміною відстані Δ_1 за час Δt контакту нехтуємо. Таке припущення буде наслідком порівняння часу Δt з орбітальними періодами руху Марса та Землі, а також із порівняння із Δ_1 шляхів *ДС* та *EF*, які планети проходять орбітами за час Δt.

3) Будемо вважати, що вектори орбітальних швидкостей Марса та Землі за час Δt не змінюються. Таке припущення є логічним наслідком з п. 2) і дає можливість вважати, що дуги *EF* та *СД* можна замінити на відрізки *EF* та *ДС*. Крім того, з цього ж припущення випливає, що ДС ∥ EF. Отже, можна вважати, що *СДEF* – рівнобічна трапеція (*EF* < *ДС*, оскільки $v_{пМ} < v_З$).

Нехай: точка *К* – точка перетину прямих *AE* та *BC*; *KF* = Δ_2. Очевидно, що можна вважати, що *СВ* = *ДА* = r_0, оскільки діаметр Сонця $d_С$ набагато менший за r_0.

Трикутник *КАВ* – рівнобедрений, оскільки відрізок *АВ* практично паралельний до відрізків *ДС* та *EF*(нижче буде показано, що $d_С \ll \Delta_2$ і вже показано, що $d_С \ll \Delta_1$), а *СДEF* – трапеція (припущення 2) та 3)). Бачимо, що трикутники *KEF*, *КДС* та *КАВ* – подібні (за трьома кутами), тому можемо записати:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta t\, v_{пМ}} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{\Delta t\, v_З - d_З} = \frac{\Delta_1+\Delta_2+r_0}{d_С}, \qquad (6)$$

де $d_З$ – діаметр Землі; Δt – час транзиту.

З (6) послідовно знаходимо:

$$\Delta t = \frac{\Delta_1 d_С + (\Delta_1 + r_0) d_З}{v_З(\Delta_1 + r) - r_0 v_{пМ}}, \qquad (7)$$

$$\Delta_2 = \frac{(\Delta_1 + r_0) v_{пМ}\, \Delta t}{d_С - v_{пМ}\, \Delta t}. \qquad (8)$$

Підставляючи в (7) та (8) задані в умові задачі параметри, а також використовуючи раніше отримані розрахунки (*), (***), (****), знаходимо:

$$\Delta t \approx 37448\,с \approx 10,4^h, \qquad (9)$$

$$\Delta_2 \approx 3,72 \cdot 10^8 \text{ км}. \qquad (10)$$

З (9) та (10) бачимо, що

$$\Delta t \ll (T_{орб\,З},\, T_{орб\,М}),$$

де $T_{орб\,З}$, $T_{орб\,М}$ – сидеричні періоди орбітального руху Землі та Марса відповідно. За час Δt Земля проходить шлях $l_1 = \Delta t\, v_З \approx 1,16 \cdot 10^6$ км, а Марс –

шлях $l_2 = \Delta t\, v_{пМ} \approx 9{,}92 \cdot 10^5$ км, що суттєво менше за значення Δ_1. Також бачимо, що $d_С \ll \Delta_2$.

Отже, проведені порівняння повністю виправдовують припущення, введені нами вище.

.

***Відповідь*:** $\Delta t \approx 10{,}4^h$.

2. Густини чорних дір. За радіуси чорних дір приймають так званий гравітаційний радіус. Його значення співпадає з радіусом тіла для якого друга космічна швидкість дорівнює швидкості світла. Наймасивніша з чорних дір відкрита в центрі галактики NGC 4889 (сузір'я Волосся Вероніки) – $2{,}1\cdot10^{10}$ M_{SUN}. Визначити: у скільки разів середня густина у цієї чорної діри відрізняється від ядерної густини, за яку можна прийняти середню густину наймасивнішої нейтронної зорі Vela X-1 (сузір'я Вітрила) – 1,88 M_{SUN}, прийнявши значення її радіуса 10 км.

Розв'язання

1) Друга космічна швидкість для космічного тіла з масою M і радіусом R визначається за формулою

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,.$$

2) Прирівнявши це значення швидкості світла c, за умови $R = r_g$, визначимо значення гравітаційного радіуса чорної діри

$$r_g = \frac{2M_{\text{чд}}}{c^2} = 6{,}22\cdot10^{13}\text{ м}$$

3) Середня густина чорної діри обчислюється за формулою

$$\bar{\rho}_{чд} = \frac{M_{чд}}{\frac{4}{3}\pi r_g^3}\,,$$

що за умовою задачі відповідає значенню

$$\bar{\rho}_{чд} = \frac{21\cdot10^9\cdot2\cdot10^{30}}{\frac{4}{3}\pi\left(6{,}2\cdot10^{13}\right)^3} = 0{,}042\ \ кг/м^3\,.$$

4) Середня густина нейтронної зорі за умовою задачі

$$\rho_{нз} = \frac{1{,}88\cdot2\cdot10^{30}}{\frac{4}{3}\pi\left(10\cdot10^3\right)^3} = 9{,}0\cdot10^{17}\ \ кг/м^3$$

5) Відповідь: таким чином, густина ядерної речовини (нейтронної зорі) більша за середню густину наймасивнішої чорної діри в

$$\frac{9{,}0\cdot10^{17}}{0{,}042} = 2{,}1\cdot10^{19}\ \text{разів.}$$

3. Затемнення. Астроном-аматор, спостерігаючи за повним сонячним затемненням, відмітив, що воно відбулось, коли Сонце було практично в зеніті. При цьому він знав, що ширина смуги повної тіні становила 44,5 км. Розрахуйте відстань до Місяця в момент затемнення, якщо відомо, що відстань до Сонця від Землі становила 152,1 млн. км (1,017 а.о.). Вкажіть орієнтовно широту місця розташування астронома та час, коли відбулось затемнення?

Розв'язання

Оскільки Сонце в зеніті, то значить місце розташування спостерігача поблизу екватора (більш точно між південним та північним тропіками планети).

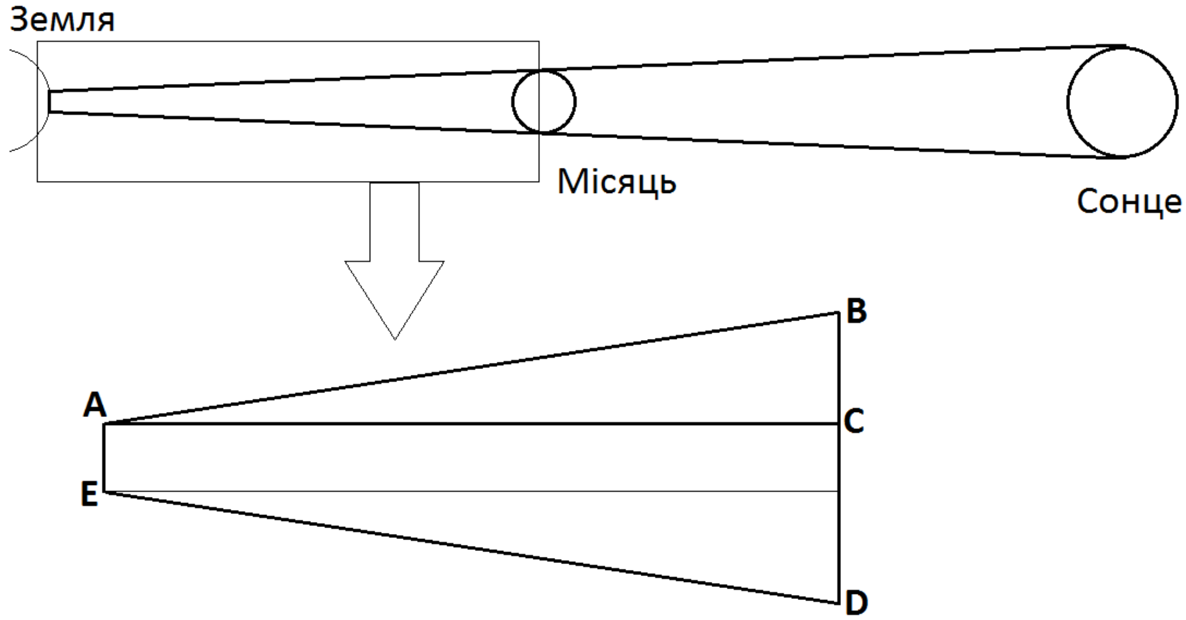
З умови видно, що відстань до Сонця близька до максимальної (Земля в афелії), це трапляється на початку липня.

На початку липня Сонце має схилення близьке до максимального, значить спостерігач не дуже далеко від північного тропіка (ближче до екватору) в місцевості з широтою близько 23°п.ш.

Оскільки затемнення відбулось, коли Сонце було поблизу зеніту, значить проходило верхню кульмінацію, то місцевий сонячний час – близько полудня

Отже затемнення спостерігалось поблизу північного тропіка, влітку в полудень.

Розглянемо спрощену схему затемнення:



AE – ширина повної смуги тіні на поверхні Землі. BD – діаметр Місяця і рівний $2 \cdot R_m$.
Кут BAC очевидно рівний половині кутового діаметра Сонця на момент затемнення (знайдемо знаючи радіус Сонця та відстань до нього:

15.72').

.

Знайдемо відстань між спостерігачем та Місяцем на момент затемнення:

.

Відстань між центрами Місяця та Землі була близько 381 тис. км.

Аналогічну формулу можна отримати з подібності трикутників: .

4. Титан. На фото, яке отримане 22.05.2015 р. з відстані 2,19 мільйона кілометрів від планети космічним зондом "Кассіні" зображено Сатурн та його супутник Титан. Вважаючи, що Титан має сферичну форму, оцініть його радіус, якщо полярний радіус Сатурна 54364 км. За фотографією оцініть відношення полярного радіусу планети до екваторіального. Велика піввісь орбіти Титана 1221800 км.

Розв'язання

1. Світлі і темні лінії на фотографії – кільця Сатурна, які розміщені в його екваторіальній площині. Сполучаючи точки *A* і *B* на фотографії зображуємо екваторіальний діаметр Сатурна на фотографії d_E (рис. 1). Знаходимо т. О - центр відрізка *AB* і проводимо до неї перпендикуляр. $OK = r_П$ - полярний радіус Сатурна на фотографії. Полярний діаметр Сатурна на фотографії - $d_П = 2 \cdot r_П$.

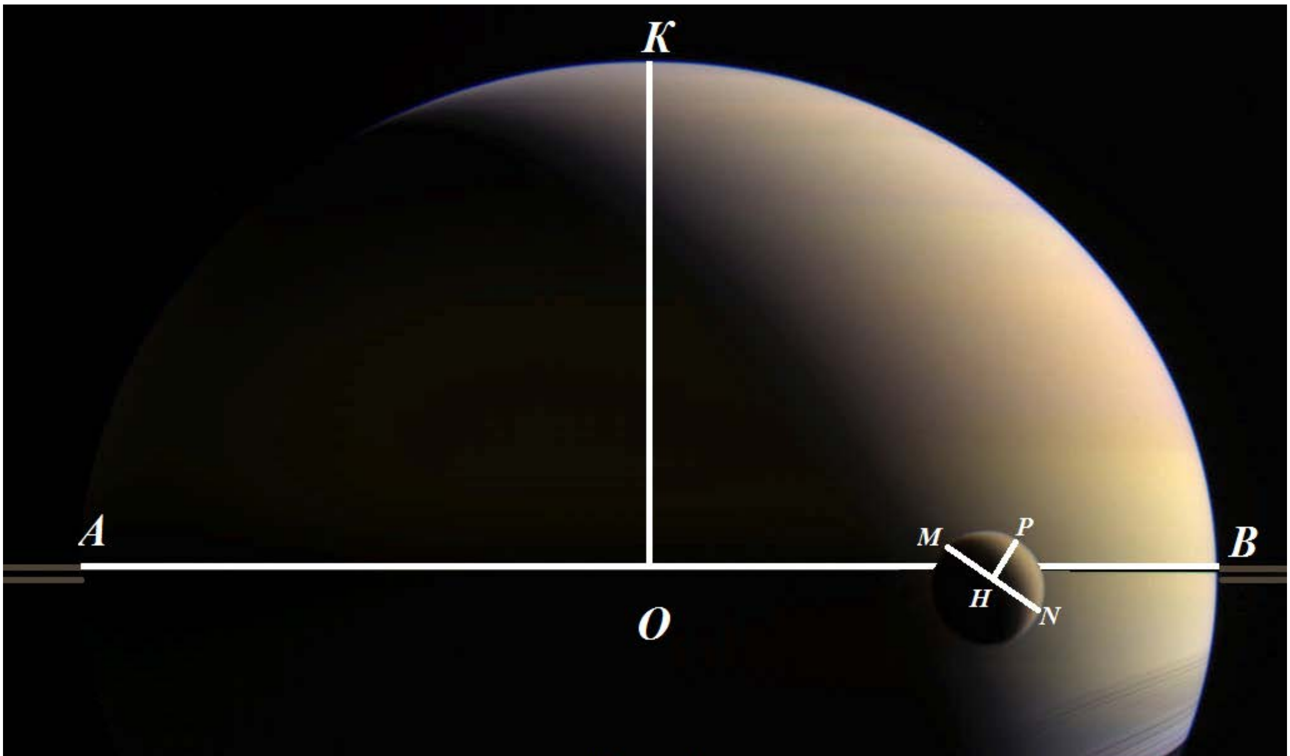


Рис. 1.

2. Проводимо через Титан хорду *MN*, довжину якої приймемо за y і серединний перпендикуляр до неї $PH = x$. Виміряємо відповідні величини лінійкою на фотографії:

$d_E = 151 \ мм.$ $\qquad r_E = \dfrac{d_E}{2} = 75{,}5 \ мм.$

$d_П = 134 \ мм.$ $\qquad r_П = \dfrac{d_П}{2} = 67 \ мм.$

$x = 6 \ мм.$

$y = 15 \ мм.$

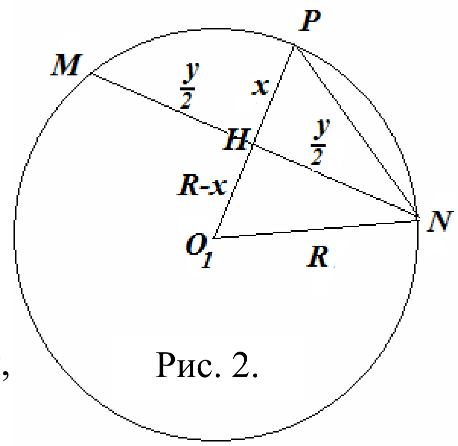


Рис. 2.

Використовуючи геометричні міркування, визначимо діаметр тіні Титана. Як видно з рис. 2:

$$(HO_1)^2 + (HN)^2 = (O_1N)^2 \qquad (R - x)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2$$

$$R^2 - 2 \cdot R \cdot x + x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2$$

$$2 \cdot R \cdot x = x^2 + \frac{y^2}{4} \qquad 2 \cdot R \cdot x = \frac{4 \cdot x^2 + y^2}{4} \qquad R = \frac{4 \cdot x^2 + y^2}{8 \cdot x}$$

Отже діаметр Титана на фотографії: $d(T) = 2 \cdot R = \frac{4 \cdot x^2 + y^2}{4 \cdot x}$.

3. З точки спостереження, яка знаходиться на "Кассіні", кут γ, під яким видно Титан і його тінь на Сатурні є однаковим (рис. 3). З прямокутного трикутника, в якому один з катетів є радіус Титана, а другий відстанню від "Кассіні" до Титана можна записати: $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{R(T)}{l_1 - l_2}$ (l_1 - відстань від "Кассіні" до Сатурна, l_2 - відстань від Титана до Сатурна). Оскільки при малих кутах тангенс кута, вираженого в радіанах, рівний самому куту, то можна наближено записати: $\frac{\gamma}{2} \approx \frac{R(T)}{l_1 - l_2} \Rightarrow \gamma = \frac{D(T)}{l_1 - l_2}$.

Якщо діаметр Титана на фотографії $d(T)$, то кутовий масштаб фотографії можна визначити зі співвідношення: $\mu = \frac{\gamma}{d(T)}$.

4. Проводячи міркування, аналогічні (4) стосовно Сатурна, отримаємо: $\beta = \frac{D_E}{l_1}$, $\beta = \mu \cdot d_E$, де β - кут, під яким видно Сатурн з "Кассіні". Проводячи нескладні математичні операції, отримаємо значення діаметра Титана.

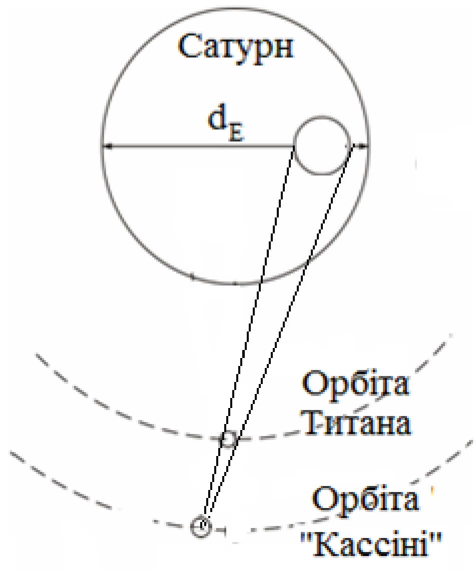


Рис. 3.

$$\gamma = \frac{D(T)}{l_1 - l_2}, \ \mu = \frac{\gamma}{d(T)} \Rightarrow \mu \cdot d(T) = \frac{D(T)}{l_1 - l_2} \quad (1)$$

$$\beta = \frac{D_E}{l_1}, \ \beta = \mu \cdot d_E \Rightarrow \mu \cdot d_E = \frac{D_E}{l_1} \quad (2)$$

$$\frac{D(T)}{(l_1 - l_2) \cdot d(T)} = \frac{D_E}{d_E \cdot l_1} \Rightarrow$$

$$D(T) = \frac{D_E \cdot d(T) \cdot (l_1 - l_2)}{d_E \cdot l_1} \Rightarrow$$

$$D(T) = \frac{D_E \cdot d(T)}{d_E} \cdot \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)$$

Очевидно, що справедливим буде відношення:

$$\frac{D_П}{D_E} = \frac{d_П}{d_E}, \qquad\qquad D_E = \frac{d_E \cdot D_П}{d_П}$$

Обчислення:

$$d(T) = 2 \cdot r(T) = \frac{4 \cdot x^2 + y^2}{4 \cdot x} = \frac{4 \cdot (6 \ мм)^2 + (15 \ мм)^2}{4 \cdot 6 \ мм} = 15{,}375 \ мм.$$

$$D_E = \frac{d_E \cdot D_П}{d_П} = \frac{151 \ мм \cdot 2 \cdot 54364 \ км}{134 \ мм} = 122522 \ км.$$

$$D(T) = \frac{D_E \cdot d(T)}{d_E} \cdot \left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right) = \frac{122522 \ км \cdot 15{,}375 \ мм}{151 \ мм} \cdot \left(1 - \frac{1221800 \ км}{2190000 \ км}\right) = 5515 \ км.$$

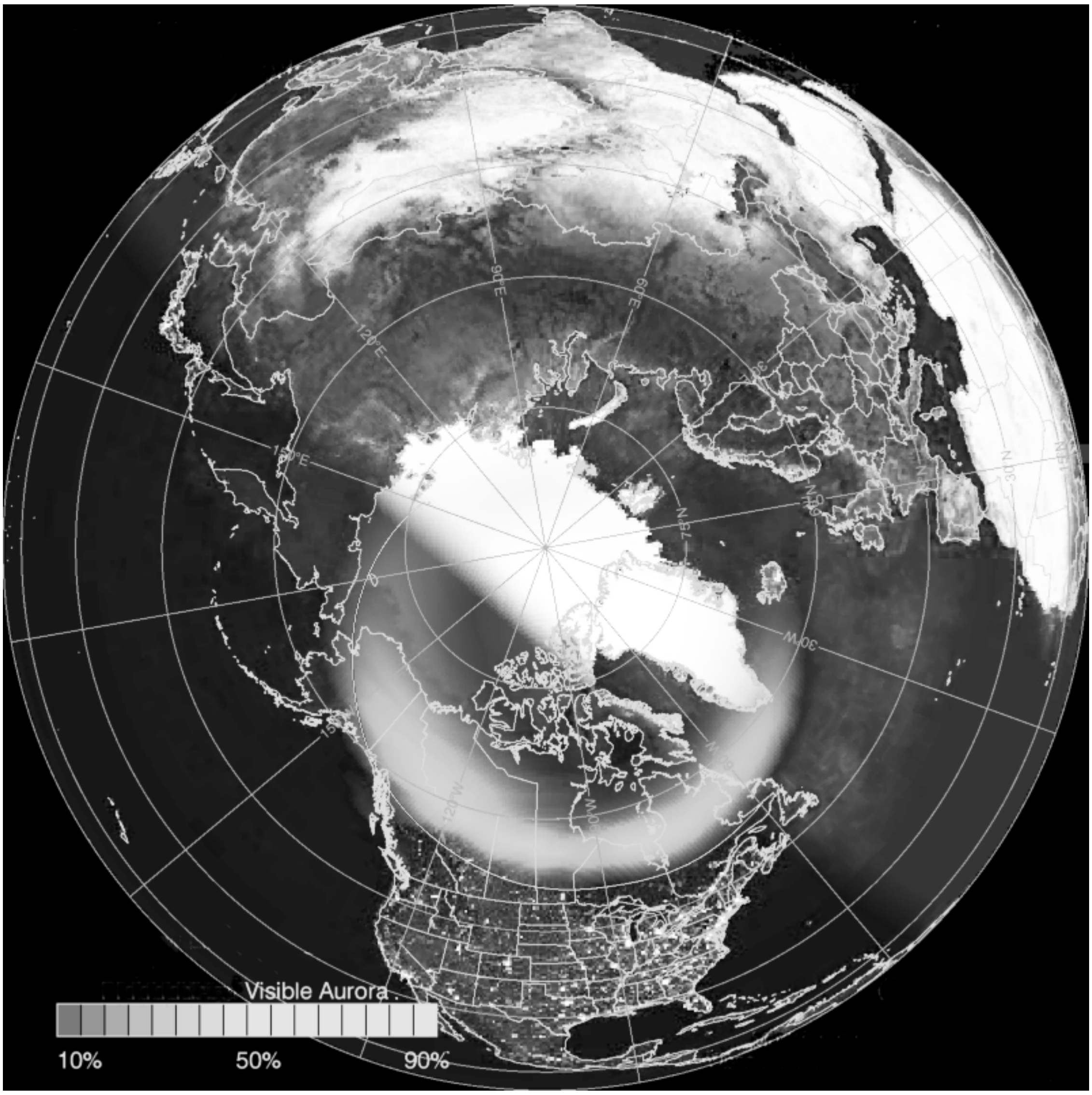
$$\frac{D_П}{D_E} = \frac{d_П}{d_E} = \frac{134 \ мм}{151 \ мм} = 0{,}887$$

NASA дає значення діаметра Титана – 5150 *км*.

5. **Полярне сяйво.** На супутниковому знімку зображено полярне сяйво над північною полярною зоною Землі. Визначити:

а) дату і час (за Київським часом), коли міг бути отриманий цей знімок. (довгота Києва $2^h\ 02^m$)

б) до якої широти можна було спостерігати це сяйво, враховуючи, що полярні сяйва з'являються, в середньому, на висотах близько 110 кілометрів (форму Землі вважати кулею).

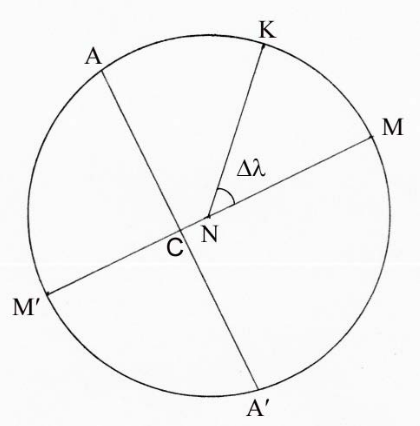


Розв´язання

На знімку видно, що в північній півкулі спостерігається полярний день.

Умова настання полярного дня на певній широті

$\delta_{\odot} = 90 - \varphi_п$



По лінії розділу світла і тіні АА на перетині з полуденним меридіаном ММ′ (точка С) визначаємо широту $\varphi_п$, на якій в цю дату почався (закінчився) полярний день.

$\varphi_п = 84°$

Визначення дати зводиться до розрахунку схилення Сонця

$\delta_\odot = 90 - 84° = 6°$

Схилення Сонця змінюється в межах від 0° в дні рівнодень до -23,5° / + 23,5° в дні сонцестоянь. Отримане схилення показує, що знімок було отримано близько днів рівнодень. Вибираємо найближчі відповідні дати 21.03 і 23.09.

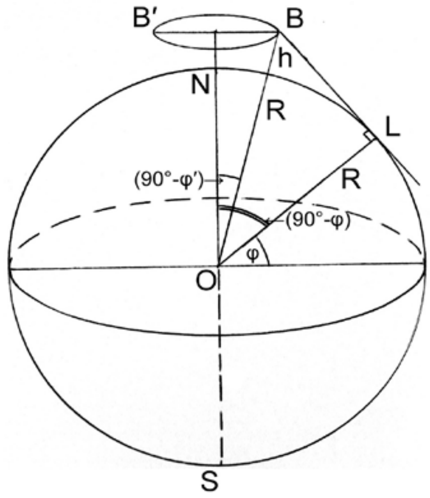
Розрахуємо кількість днів, необхідну, щоб схилення Сонця змінилося від 0° до 6°. У цей період зміна $\delta_\odot$ відбувається зі швидкістю 0,4° за добу, тобто 6°/0,4° = 15 діб. Отже знімок міг бути зроблений через 15 діб після весняного рівнодення ***05.04***, або за 15 діб до осіннього рівнодення ***07.09***.

Час знаходимо, визначивши по знімку довготу полуденного меридіана (ММ′) $\lambda = 2^h32$ ($\lambda = 38°/15 = 2{,}53^h = 2^h31^m48^s$)

Різниця довгот цього меридіана з меридіаном Києва (СК) дорівнює різниці часів на цих меридіанах:

$\lambda_{MM'} - \lambda_K = T_{MM'} - T_K$

$T_K = 12^h - 2^h32^m + 2^h02^m =$ $\boldsymbol{11^h30^m}$ за поясним київським часом і $\boldsymbol{12^h30^m}$ за літнім київським часом.



За знімком визначаємо мінімальну широту φ′ , де над Землею перебуває дуга полярного сяйва. φ′≈50°

Враховуючи висоту цього сяйво над земною поверхнею, знаходимо широту φ, до якої ще можна його спостерігати.

Нехай

BB′ - коло полярного сяйва, h – висота сяйва, R – радіус Землі.

З прямокутного трикутника BOL :

$$\cos\left[(90° - \varphi) - (90° - \varphi')\right] = \frac{R}{R + h}$$

$$\varphi = \varphi' - \arccos\left(\frac{R}{R + h}\right)$$

$$\varphi = 50{,}00° - \arccos\left(\frac{6371}{6371 + 110}\right) = 50{,}00° - 10{,}57° = 39{,}43°$$

$$\varphi \approx 40°$$