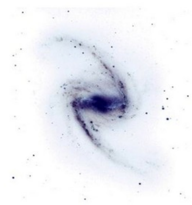
XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії **м. Львів,** **31 березня – 5 квітня 2024 р.**		**Теоретичний тур** **10 клас**

1. Зоря, планета та космічний корабель.

Деяка планета обертається навколо деякої зорі по коловій орбіті. Видима із Землі максимальна кутова відстань між зорею і планетою дорівнює π_1 , а період її обертання навколо зорі рівний T. У майбутньому до планети відрядили космічний корабель. Коли корабель подолав відстань Δd у напрямку до цієї системи, спостережувана з корабля максимальна кутова відстань між зорею і планетою стала рівною π_2 . Знайдіть масу зорі. Рухом зір у просторі знехтувати. **(10 балів)**

Розв'язок

Нехай R - радіус орбіти, d_1 - відстань між Землею і зорею, d_2 - відстань між кораблем і зорею на момент замірювання π_2, M_s - маса зорі, m - маса планети. Тоді

$$\pi_1=\frac{R}{d_1};\pi_2=\frac{R}{d_2};\Delta d=d_1-d_2.$$

Звідси: $R=\dfrac{\pi_1\pi_2\Delta d}{\pi_2-\pi_1}$;

$$V=\frac{2\pi R}{T};$$

$$m\frac{V^2}{R}=G\frac{mM_s}{R^2}\rightarrow M_s=\frac{v^2 R}{G}$$

$$M_s=\frac{4\pi^2}{GT^2}\frac{\left(\pi_1\pi_2\Delta d\right)^3}{\left(\pi_2-\pi_1\right)^3}$$

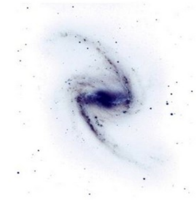
2. Зловити полюс у пастку.

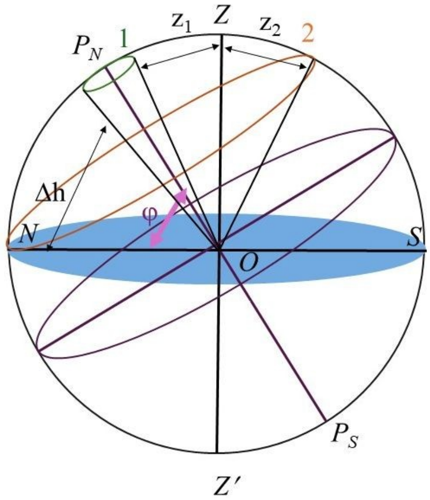
Дві зорі мають однакові висоти верхніх кульмінацій, що дорівнюють 62°, але, при цьому, мають кардинально різні схилення. Також обидві зорі ніколи не заходять на даній широті. На яких широтах це може відбуватися? Визначте можливий діапазон значень схилень для цих зір.

(10 балів)

Розв'язок

Однакові висоти верхніх кульмінацій при різних схиленнях означають кульмінації по різні сторони від зеніту. Припустимо, для початку, що ми знаходимось у північній півкулі світу. Розглянемо граничний випадок, коли зоря 2 кульмінує на горизонті. Різниця висот нижніх кульмінацій зір 1 та 2 буде дорівнювати сумі зенітних відстаней зір $\Delta h=z_1+z_2=2(90-62)=56°$. Тоді розмір добового кола зорі 1 доповнює кути Δh та $z_1=90-62=28°$ до 90° (див. малюнок). Неважко порахувати, що цей розмір буде дорівнювати 6° (та складатиме ту пастку, у яку ми маємо помістити полюс світу). Полюс світу буде посередині цього кола, тобто його висота (яка дорівнює широті) буде $\varphi=\Delta h+\frac{6}{2}=59°$. А схилення зорі 1 при цьому $\delta_1=90-\frac{6}{2}=87°$. Відповідно, $\delta_2=\delta_1-\Delta h=87-56=31°$.

XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.		Теоретичний тур 10 клас



Якщо зоря 2 кульмінуватиме вище горизонту, то $\Delta h = \Delta\delta$ залишиться тим самим, а широта може бути дещо більшою, що призведе до зменшення добового кола зорі 1. Другий граничний випадок буде, коли це коло стане нульовим (пастка для полюса максимально стиснеться), тобто коли $\delta_1 = 90°, \delta_2 = \delta_1 - \Delta h = 34$. А широта $\varphi = h_1 = 62$.

Таким чином, для північної півкулі, $\varphi \in [59{,}62]$, $\delta_1 \in [87{,}90], \delta_2 \in [31{,}34]$.

Очевидно, що для південної півкулі міркування будуть тими самими, але широта та схилення зір будуть від'ємними: $\varphi \in [-62, -59]$, $\delta_1 \in [-90, -87,], \delta_2 \in [-34, -31]$.

2 варіант розв'язку (виключно через формули).

Однакові висоти верхніх кульмінацій при різних схиленнях означають кульмінації по різні сторони від зеніту.

Запишемо формули верхніх кульмінацій північніше та південніше зеніту

$h_{в1} = 90 - \delta_1 + \varphi = 62$ (1)

$h_{в2} = 90 + \delta_2 - \varphi = 62$ (2)

Складаючи ці рівняння, отримуємо умову:

$\delta_1 - \delta_2 = 56$, (3)

яка обов'язкова для всієї задачі.

Напишемо умову для нижньої кульмінації зорі з меншим схиленням (у цих позначеннях δ_2).

$h_{н2} = \varphi - 90 + \delta_2 \geq 0$. (4)

Складаємо нерівність (4) з рівнянням (1), отримуємо

$$2\varphi - (\delta_1 - \delta_2) \geq 62.$$

Та враховуючи умову (3), отримуємо остаточно

$$\varphi \geq 59.$$

Відповідно, виражаючи широту з формули (1), отримуємо умову для δ_1

$$\varphi = h_{в1} - 90 + \delta_1 \geq 59 \quad ,$$

$$\delta_1 \geq 87.$$

Очевидно, що остаточною умовою для δ_1 буде $87 \leq \delta_1 \leq 90$, оскільки схилення більше бути не може. Тому розлянемо випадок, коли $\delta_1 = 90$. З умови (3) отримуємо, що

$$\delta_2 = \delta_1 - 56 = 34,$$

Тоді з формули (1), знайдемо, що широта дорівнює висоті у верхній (та нижній) кульмінації зорі 1, що логічно, бо зоря (гіпотетична) з $\delta_1 = 90$знаходиться у полюсі світу: $\varphi = h_{в1} = 62$.

Таким чином, для північної півкулі, $\varphi \in [59{,}62]$, $\delta_1 \in [87{,}90], \delta_2 \in [31{,}34]$.

Очевидно, що для південної півкулі міркування будуть тими самими, але широта та схилення зір будуть від'ємними: $\varphi \in [-62, -59]$, $\delta_1 \in [-90, -87,], \delta_2 \in [-34, -31]$.

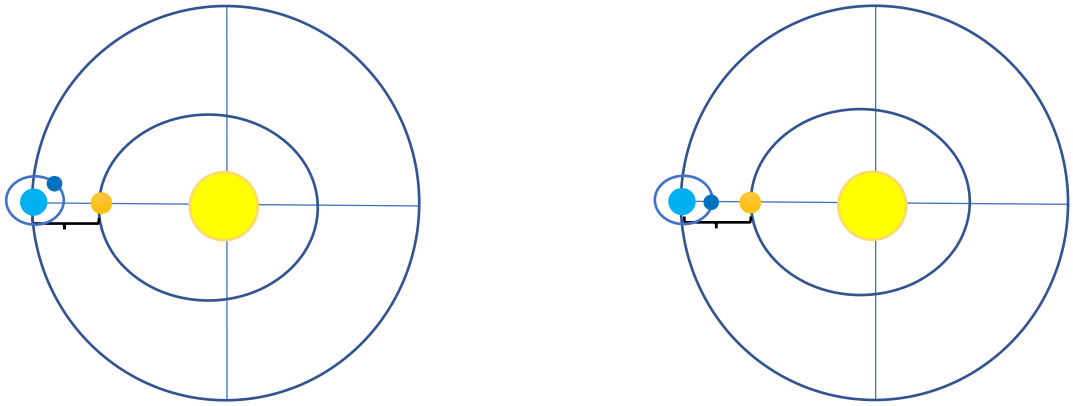
3. Земля і Місяць з Меркурія.

Оцініть максимально можливу видиму зоряну величину Землі і Місяця з поверхні Меркурія, велика піввісь орбіти якого a_{Mr} = 0.39 а.о., ексцентриситет e_{Mr} = 0.21. Максимальний блиск повного Місяця з Землі $m_{ME} = -12^m.9$, максимальний блиск повної Землі з Місяця $m_{EM} = -16^m$, відстань Місяця у перицентрі q_M = 363100 км. Намалюйте схему розташування небесних тіл при максимальному блиску системи Земля-Місяць з Меркурія. Орбіту Землі вважати коловою.

(10 балів)

Розв'язок

1. Спочатку оцінимо мінімальну можливу відстань між Меркурієм і системою Земля-Місяць (вона схематично показана на рисунку):



а б

Обидві схеми розташування тіл при розв'язку приймаються вірними.

2. Визначимо мінімальну відстань до Меркурія від Землі ($l_{Mr\,min} = a_E - Q_{Mr}$):

$$Q_M = a_{Mr}(1 + e_{Mr}) = 0.39(1 + 0.21) = 0.47\,a.o.;$$
$$l_{Mrmin} = a_E - a_{Mr}(1 + e_M) = 1 - 0{,}47 \approx 0.53\,a.o.$$

3. Продемонструємо можливість знехтувати максимальною відстанню від Землі до Місяця (d):

$$d = 406000\,км = 0.0027\,a.o.$$
$$\left(\frac{0.0027\,a.o.}{0.53\,a.o.}\right) * 100\% = 0.51\%$$ (відповідно, можна знехтувати).

4. Тепер знайдемо максимальний блиск Місяця з Меркурія (m_{MMr}):

$$m_{MMr} = m_{ME} - 5\,lg\left(\frac{q_M}{l_{Mrmin}}\right)$$

$$m_{MMr} = -12.9 - 5\,lg\left(\frac{363100\,км}{0.53\,a.o. * 1.5 * 10^8\,км}\right) = -12.9 + 11.7 = -1.21^m$$

Також знайдемо максимальний блиск Землі з Меркурія ($m_{E\,Mr}$):

$$m_{EMr} = m_{EM} - 5\,lg\left(\frac{q_M}{l_{Mrmin}}\right)$$

$$m_{EMr}=-16-5lg\left(\frac{363100\,км}{0.53\,а.о.*1.5*10^8\,км}\right)=-16+11.7=-4.31^m$$

5. Знайдемо сумарний блиск системи Земля-Місяць з Меркурія:

$$E_{MMr}=2.512^{1.2}=3.02$$

$$E_{EMr}=2.512^{4.3}=52.49$$

$$E_{MMr}+E_{EMr}=55.51=2.512^{-m}$$

$$m_{max}=-2.5*lg(55.51)=-4.36$$

4. Комета.

Цікава комета, площина орбіти якої співпадає з площиною екліптики, пройде перигелій 21 квітня 2024 року, досягнувши блиску $3^m.3$, та матиме елонгацію 22°. Мінімальна відстань між кометою і Землею становитиме 1.546 а.о. 2 червня 2024 року. Велика піввісь орбіти комети – 17.2045 а.о., ексцентриситет – 0.9546.

Для моменту проходження перигелію кометою оцініть:

а) відстань від комети до Сонця,

б) відстань від комети до Землі,

в) променеву та поперечну компоненти швидкості комети для спостерігача на Землі,

г) дату наступного мінімального наближення комети до Сонця. **(10 балів)**

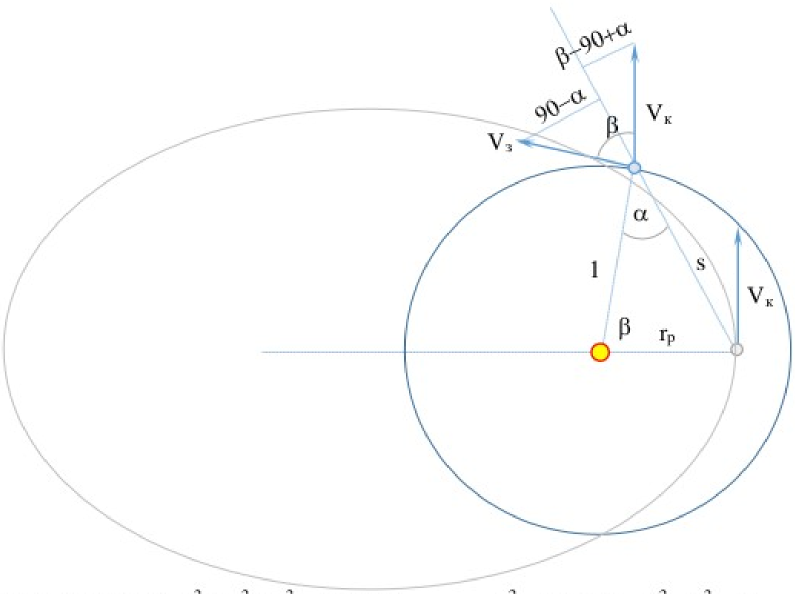
Розв'язування

а) $r_p=a(1-e)$, $r_p=1,546(1-0,9546)=0,7811$ а.о.

г) $T=a^{3/2}$, $T=17,2045^{3/2}=71,361$ рік $=71$ рік 132 доби,

21 квітня + 132 доби = 31 серпня, T_{01} = 21.04.2024 + 71рік 132доби = 31.08.2095.

б)



За теоремою косинусів $r_p^2=s^2+1^2-2s\cos\alpha$, $s^2-2s\cos\alpha+1^2-r_p^2=0$,

$$s^2 - 1{,}8544s - 0{,}3899 = 0,$$

$D = 1{,}879$, $\quad s_{1,2} = \dfrac{1{,}8544 \pm \sqrt{1{,}879}}{2}$, $\quad s_1 = 1{,}613$ а.о.

$s_2 = 0{,}242$ а.о. – не відповідає умові мінімальної відстані

в) швидкість комети у перигелії $V = \sqrt{GM_{\odot}\left(\dfrac{2}{r_p} - \dfrac{1}{a}\right)}$

$V = 47{,}1$ км/с

Так як Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаєм, що у квітні відстань Землі від Сонця 1 а.о. Швидкість Землі $V_з = \sqrt{\dfrac{GM_{\odot}}{1а.о.}} = 29{,}8$ км/с

$\cos\beta = \dfrac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0{,}634$, $\qquad \beta = 129{,}3°$

$V_к = 47{,}1$ км/с $\quad V_з = 29{,}8$ км/с

$v_{відн}^2 = v_з^2 + v_к^2 - 2v_з v_к \cos\beta$, $\qquad v_{відн} = 69{,}9$ км/с

$V_{rк} = V_к \cos(\beta + \alpha - 90) \quad = 22{,}6$ км/с

$V_{rз} = V_з \cos(90 - \alpha) \quad = 11{,}2$ км/с $\qquad V_{r\,відн} = V_{rк} - V_{rз} = 11{,}4$ км/с

$V_{tк} = V_к \sin(\beta + \alpha - 90) \quad = 41{,}3$ км/с

$V_{tз} = V_з \sin(90 - \alpha) \quad = 27{,}6$ км/с $\qquad V_{t\,відн} = V_{tк} + V_{tз} = 68{,}9$ км/с

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30-31 серпня 2095 року.

5.Подвійна зоряна система.

Якщо в подвійній системі зорі знаходяться дуже близько одна до одної, то можливе перетікання речовини з однієї зорі на іншу. При цьому параметри орбіти змінюються з часом, але залишається постійним сумарний кутовий момент системи L .

1) Для системи двох зір, які рухаються по колових орбітах, сумарний кутовий момент задається формулою

$$L = M_1 r_1^2 \omega + M_2 r_2^2 \omega,$$

де M_1, M_2 – маси зір, r_1 та r_2 – відстані від зір до центру мас системи, ω – кутова швидкість обертання системи. Виразіть кутовий момент системи через маси зір M_1, M_2 та відстань між ними d.

2) При тривалому спостереженні деякої подвійної системи було знайдено, що за 30 років відстань між зорями зменшилася на $\Delta d = 2 \cdot 10^{-5}$ а.о. відносно початкової відстані $d = 0.1$ а.о. Початкові маси зір в системі $M_1 = 5M_{\odot}$ та $M_2 = 3M_{\odot}$. Знайдіть на скільки за ці 30 років змінилася маса кожної зорі в системі? Під час обрахунків можете вважати, що зміни мас набагато менші за початкові маси зір. **(10 балів)**

Розв'язок

Відстань від зір до центра мас системи:

$$r_1 = \frac{M_2 d}{M_1 + M_2} (1) \quad r_2 = \frac{M_1 d}{M_1 + M_2} (2).$$

У такому разі кутовий момент системи (момент імпульсу)

$$L = M_1 r_1^2 \omega + M_2 r_2^2 \omega = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} d^2 \omega \quad (3)$$

Для подвійної системи зір, які рухаються коловими орбітами, відстань між зорями дорівнює великій півосі системи a. Запишемо узагальнений третій закон Кеплера, щоб пов'язати велику піввісь і кутову швидкість обертання системи:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{d^3} \quad (4)$$

Із співвідношення (4) визначимо кутову швидкість і підставимо у вираз (3):

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} d^2 \omega = \sqrt{\frac{G (M_1 M_2)^2 d}{(M_1 + M_2)}} \quad (5)$$

Розглянемо тепер зміну орбіти через перетікання речовини з однієї зорі до іншої. Очевидно, що при цьому сумарна маса не змінюється:

$$M_1 + M_2 = const.$$

Це дає змогу пов'язати зміни мас зір: $\Delta M_2 = -\Delta M_1$.
Оскільки в процесі перетікання речовини L не змінюється, то бачимо, що виконується умова

$$(M_1 M_2)^2 d = const.$$

Запишемо цей результат для початкового та кінцевого моментів часу:

$$(M_1 M_2)^2 d = (M_1 + \Delta M_1)^2 (M_2 + \Delta M_2)^2 (d - \Delta d) \quad (6)$$

Врахуємо, що зміна відстані є малою $(\Delta d \ll d)$, тому зміна маси також буде малою. Розкриємо дужки, залишивши лише доданки, які містять малі величини у першому степені (нехтуємо доданками, що містять ΔM_1^2, $\Delta M_2^2, \Delta M_1 \Delta d, \Delta M_2 \Delta d$), та врахувавши, що $\Delta M_2 = -\Delta M_1$. Після скорочення отримаємо:

$$2d(M_2 - M_1)\Delta M_1 - M_1 M_2 \Delta d = 0 \quad (7)$$

Із (7) знаходимо:

$$\Delta M_1 = \frac{M_1 M_2}{2(M_2 - M_1)} \cdot \frac{\Delta d}{d} = -7.5 \cdot 10^{-4} M_\odot$$

тобто маса першої зорі зменшилася. Це означає, що перетікання речовини відбувається від більш масивної зорі до менш масивної. При цьому

$$\Delta M_2 = -\Delta M_1 = 7.5 \cdot 10^{-4} M_\odot.$$